Автоматика и телемеханика, № 6, 2024

© 2024 г. Д.В. ШАТОВ, канд. техн. наук (dvshatov@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;
Национальный исследовательский университет
«Московский физико-технический институт», Долгопрудный)

ОДНОВРЕМЕННАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ СВЕРХУСТОЙЧИВОСТИ И ТЕХНИКИ D-РАЗБИЕНИЯ[1]

Рассматривается задача одновременной стабилизации семейства линейных систем второго порядка с помощью статической линейной обратной связи по состоянию применительно к системам с переключениями. В основе предложенного подхода лежит известный метод синтеза, когда с помощью решения задачи линейного программирования ищется статический регулятор, приводящий матрицы некоторого семейства, составляющего переключаемую систему, в замкнутом состоянии к сверхустойчивости, что гарантирует экспоненциальную устойчивость соответствующей переключаемой системы. Данный метод развивается на случай, когда не все семейство матриц может быть одновременно приведено к сверхустойчивости: для неприводимых матриц с помощью техники D-разбиения определяются линейные ограничения на множество стабилизирующих регуляторов, которые добавляются к ограничениям в задаче линейного программирования. Кратко анализируются свойства синтезированной переключаемой системы. Приводится пример решения задачи синтеза предложенным подходом.

Ключевые слова: нестационарные системы, синтез регулятора, сверхустойчивость, статический регулятор по состоянию, одновременная стабилизация, системы с переключениями.

DOI: 10.31857/S0005231024060038, **EDN:** XXQHFY

1. Введение

Задача *одновременной стабилизации* заключается в поиске одного закона управления, обеспечивающего устойчивость всех элементов некоторого семейства динамических объектов. Такие задачи составляют отдельный класс в области робастного управления. Наибольший интерес они вызывали в период с конца 80-х и в 90-е годы XX в. [1–6]. В прикладном смысле популярность получил подход на основе линейных матричных неравенств (ЛМН), предложенный в [2, 7], что связано с появлением эффективных численных методов решения задач полуопределенного программирования.

[1] Результаты исследований, представленные в разделе 4, получены за счет средств Российского научного фонда (проект № 21-71-30005), https://rscf.ru/project/21-71-30005/.

Содержательно близкие задачи синтеза возникают в теории *систем с переключениями* (иначе теории *переключаемых систем*) [8, 9], которая изучает нестационарные системы специального вида. Параметры (и структура) таких систем меняются с течением времени по некоторому правилу, называемому *законом переключений.* Далее рассматриваются только линейные переключаемые системы, когда в качестве меняющихся параметров (между которыми происходят переключения) выступают матрицы линейных подсистем из некоторого известного множества. Решение задачи одновременной стабилизации для таких систем доставляет лишь необходимое условие асимптотической устойчивости, которое не учитывает влияние переключений на устойчивость системы, тогда как в самом общем случае задача синтеза регулятора переключаемой системы состоит в поиске закона управления, гарантирующего асимптотическую устойчивость при любом произвольном законе переключений. Такая задача синтеза является намного более сложной, чем просто одновременная стабилизация. Основным инструментом ее решения служит поиск регуляторов, обеспечивающих существование общей функции Ляпунова у всех подсистем.

Описанная общая задача стабилизации линейных систем с переключениями была исследована, в частности, в [10, 11], где был предложен новый подход к ее решению с помощью статического регулятора по состоянию. Основной идеей подхода было использование *сверхустойчивости*, которая применительно к теории управления была предложена и изучена Б.Т. Поляком и П.С. Щербаковым в [12, 13]. В [12] описаны сверхустойчивые матрицы и исследованы свойства линейных систем с такими матрицами (сверхустойчивые системы), а в [13] рассмотрены задачи синтеза регуляторов, придающих замкнутой системе свойство сверхустойчивости, там же исследован синтез статического регулятора по состоянию в форме решения задачи линейного программирования. В [14–17] сверхустойчивость использовалась для решения иных задач теории управления.

Использование сверхустойчивости применительно к переключаемым системам обусловлено следующим свойством: любое семейство сверхустойчивых систем одинакового порядка образует экспоненциально устойчивую систему с переключениями при любом законе переключений [18]. Именно это свойство используется в упомянутых работах [10, 11] для того, чтобы при синтезе переключаемой системы заведомо гарантировать ее устойчивость. В [11] приведена теорема, распространяющая результаты [13] на случай систем с переключениями. В частности, [11, Теорема 3] дает необходимые и достаточные условия существования регулятора, который приводит все семейство исходных систем к сверхустойчивости, но не предлагает конструктивный алгоритм синтеза.

В [13] показано, что сверхстабилизации регулятором по состоянию можно добиться далеко не всегда, поэтому подход, описанный в [11], может оказаться неприменим, так как не существует сверхстабилизирующего регулятора, удовлетворяющего всем необходимым ограничениям одновременно. В настоящей работе предложена модификация подхода [11], в которой для подсистем, не приводимых к сверхустойчивости, ищется просто стабилизирующий регулятор. Процедура синтеза сводится к решению задачи линейного программирования (так же как в [13]), в которой линейные ограничения разбиваются на два типа: первый задается системами, которые можно привести к сверхустойчивости, а второй – теми, которые нельзя. Для последних систем ограничения, задающие область стабилизирующих регуляторов, ищутся с помощью техники D-разбиения [19, 20] исследованием устойчивости характеристического полинома замкнутой системы. При решении описанной задачи линейного программирования гарантируется только устойчивость отдельных подсистем переключаемой системы (т.е. она представляет собой классическую задачу об одновременной стабилизации), а свойство экспоненциальной устойчивости при произвольных переключениях сохраняется только для подмножества сверхустойчивых матриц.

Еще одним ограничением подхода служит то, что он применим только к переключаемым системам второго порядка, так как D-разбиение трудноосуществимо для случаев исследования более чем двух параметров. Однако тут следует отметить общую сложность задач анализа и синтеза переключаемых систем даже в простых случаях невысокого порядка [8, 21, 22]. По сути, единственным эффективным методом анализа и синтеза устойчивых переключаемых систем является численная проверка существования общей квадратичной функции Ляпунова у всех ее подсистем [7, 23], что является достаточным условием устойчивости при любом сигнале переключений.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 описаны сверхустойчивые системы, их свойства и применение в задачах стабилизации линейных систем с переключениями. Раздел 3 содержит формальную постановку задачи синтеза регулятора. В разделе 4 эта задача решается, описан алгоритм синтеза и кратко анализируются свойства системы с переключениями, замкнутой найденным регулятором. В разделе 5 приведен численный пример решения задачи одновременной стабилизации предложенным подходом. Работа завершается выводами и описанием возможных перспектив развития подхода.

2. Предварительные сведения

2.1. Сверхустойчивость линейных систем

Матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется сверхустойчивой [12], если на ее главной диагонали стоят отрицательные числа, которые по абсолютной величине превосходят сумму абсолютных величин внедиагональных элементов в той же строке. Эти условия записываются как

$$-a_{ii} - \sum_{j\neq i} |a_{ij}| > 0, \quad i, j = \overline{1, n},$$

где a_{ij} – элемент матрицы A, расположенный в i-й строке и j-м столбце.

Величину

$$\sigma(A) = \sigma = \min_i \left(-a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right), \quad i, j = \overline{1, n}$$

называют *степенью сверхустойчивости* матрицы A.

Линейная стационарная система

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

у которой $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $x_0 \neq 0$ – начальные условия, а матрица A – сверхустойчивая, называется *сверхустойчивой системой*.

В [12] показано, что сверхустойчивая система (1) устойчива в смысле $\mathrm{Re}\{\lambda(A)\} < 0$, где $\lambda(\cdot)$ – собственные числа матрицы, а для ее вектора состояния при любых начальных условиях справедлива оценка:

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x_0\|_\infty e^{-\sigma t}, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

где $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_{[i]}|$ – векторная ∞-норма, $x_{[i]}$ – i-я компонента вектора x. Из этого следует, что у сверхустойчивой системы (1) есть неквадратичная функция Ляпунова вида

$$V(x) = \|x\|_\infty. \tag{3}$$

Этот результат оказывается весьма полезным для анализа и синтеза систем с переключениями.

2.2. Системы с переключением: сверхустойчивость и сверхстабилизация

Рассмотрим линейную систему с переключениями

$$\dot{x}(t) = A_{\rho(t)} x(t), \quad x(0) = x_0 \neq 0, \tag{4}$$

где $A_{\rho(t)} \in \mathcal{A} = \{A_s \in \mathbb{R}^{n \times n} : \ s \in \mathcal{S}\}$ – активная (реализуемая) в текущий момент времени матрица, $\mathcal{S} = \{1, \ldots, S\}$, $S \in \mathbb{N}$ – конечное множество индексов. Значение матрицы $A_{\rho(t)}$ задается кусочно-постоянным измеримым сигналом переключений

$$\rho(t) : [0, \infty) \to \mathcal{S}. \tag{5}$$

Тем самым $A_{\rho(\cdot)}$ является матричнозначной функцией на вещественной оси, принимающей значения из множества вещественных матриц $\mathcal{A}$.

Некоторые дополнительные ограничения на $\rho(t)$ будут оговорены отдельно в соответствующих разделах. Далее в индексах указание зависимости от времени функции $\rho(t)$ для простоты опущено.

В [18, Теорема 1] доказано, что если множество $\mathcal{A}$ содержит только сверхустойчивые матрицы, то система (4) является экспоненциально устойчивой при любом сигнале переключений (5) и произвольных начальных условиях x_0. Такую систему принято называть сверхустойчивой системой с переключениями. Более того, этот результат справедлив для любых (в том числе бесконечных) множеств сверхустойчивых матриц любой размерности.

Доказательство соответствующей теоремы в [18] основано на неравенстве (2) и анализе верхних оценок вектора состояния системы (4). Более просто, [18, Теорема 1] является следствием (3), так как $\|x\|_\infty$ представляет собой общую функцию Ляпунова для всех сверхустойчивых систем.

В [10, 11] рассматривалась динамическая система с переключениями вида

$$\dot{x} = A_\rho x + b_\rho u, \quad A_\rho \in \mathcal{A}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad b_\rho \in \mathcal{B} = \{b_s \in \mathbb{R}^n,\ s \in \mathcal{S}\}, \tag{6}$$

где b_ρ – активный вектор при управлении, который вводится по аналогии с матрицей системы A_ρ в (4), $u \in \mathbb{R}$ – управляющий сигнал, формируемый линейным статическим регулятором по состоянию:

$$u = k^\top x,$$

где $k \in \mathbb{R}^n$ – вектор-столбец его коэффициентов.

В [11] ставилась задача поиска статического регулятора k, одновременно приводящего к сверхустойчивости все множество матриц

$$\mathcal{M} = \{M_s = A_s + b_s k^\top,\ s \in \mathcal{S}\} \tag{7}$$

замкнутой системы $\dot{x}(t) = M_\rho x(t) = (A_\rho + b_\rho k^\top)x(t)$, $M_\rho \in \mathcal{M}$. Если такой регулятор существует, то он называется *одновременно сверхстабилизирующим*.

В (7) и далее индекс «s» используется у матриц (и их элементов), чтобы подчеркнуть, что данные выражения относятся к элементам множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{M}$, а не к активным матрицам A_ρ или M_ρ.

В [11, Теорема 3] сформулированы необходимые и достаточные условия существования одновременно сверхстабилизирующего регулятора (они определяются разрешимостью специальной системы линейных неравенств и проверяются численно). С практической точки зрения эти условия удобно представить в виде следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{gathered} \max \sigma, \\ -(a_{ij}^s + b_i^s k_j) - \sum_{j \neq i} n_{ij}^s \geqslant \sigma, \quad i = \overline{1,n}, \\ -n_{ij}^s \leqslant a_{ij}^s + b_i^s k_j \leqslant n_{ij}^s, \quad i,j = \overline{1,n},\ i \neq j,\ s \in \mathcal{S}, \end{gathered} \tag{8}$$

где $a_{ij}^s + b_i^s k_j = m_{ij}^s$ – элементы матриц из множества (7) замкнутой системы. В задаче (8) переменными являются степень сверхустойчивости σ, коэффициенты k_j регулятора и неотрицательные вспомогательные скалярные переменные n_{ij}^s.

В такой формулировке условия существования сверхстабилизирующего регулятора (или разрешимости задачи (8)) дает теорема 2.1 из [13], которая утверждает, что если σ, k – решение задачи (8) и $\sigma > 0$, то регулятор k – одновременно сверхстабилизирующий, в противном случае (при $\sigma \leqslant 0$) сверхстабилизация управлением вида $u = k^\top x$ невозможна.

3. Постановка задачи

Рассмотрим задачу синтеза сверхстабилизирующего статического регулятора по состоянию для двумерной системы с переключениями вида

$$\dot{x} = A_\rho x + bu,\ u = k^\top x, \quad A_\rho \in \mathcal{A} = \{A_s \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ s \in \mathcal{S}\}, \tag{9}$$

где в отличие от (6) матрицы A_s множества $\mathcal{A}$ имеют размерность 2, а вектор b задан и не подвержен переключениям.

Синтезировать сверхустойчивый регулятор, решив задачу (8), даже в этом более узком и простом случае можно далеко не всегда. В [20, стр. 138] авторы выделяют некоторые случаи для фиксированных матриц в (9), когда сверхстабилизация заведомо невозможна: например, если вектор $b \in \mathbb{R}^2$ содержит нулевые элементы, а соответствующая строка в матрице A не удовлетворяет условиям сверхустойчивости.

Далее в (9) положим $b = [1\ 1]^\top$. Для этого случая в [13] получено необходимое и достаточное условие сверхстабилизируемости матриц A_s:

$$\tau(A_s) = a_{11}^s - a_{21}^s + a_{22}^s - a_{12}^s < 0; \tag{10}$$

а если $\tau(A_s) \geqslant 0$, $s \in \mathcal{S}$, то сверхстабилизация статическим регулятором по состоянию матрицы A_s невозможна.

Также будем предполагать, что среди матриц $A_s \in \mathcal{A}$ есть не приводимые к сверхустойчивости согласно условию (10). Семейство таких матриц обозначим через A_ϕ, $\phi \in \mathcal{S}_\phi \subset \mathcal{S}$. Остальные матрицы, приводимые к сверхустойчивости, обозначаются как A_ψ, $\psi \in \mathcal{S}_\psi \subset \mathcal{S}$, естественно $\mathcal{S}_\psi \cup \mathcal{S}_\phi = \mathcal{S}$.

Рассмотрим следующую задачу синтеза.

З а д а ч а 1. *Для системы* (9) *найти статический стабилизирующий регулятор по состоянию, который для семейства матриц A_ψ обеспечивает сверхустойчивость матриц $M_\psi = A_\psi + bk^\top$ замкнутой системы, а для остальных матриц A_ϕ – устойчивость замкнутой системы.*

Задача 1 является задачей одновременной стабилизации, когда для нескольких объектов (подсистем) ищется общий стабилизирующий регулятор, и гарантировать ее разрешимость заранее невозможно. При этом устойчивость системы с переключениями, замкнутой найденным регулятором, также не гарантируется (в отличие от задачи (8)). Более подробно свойства решения задачи 1 в приложении к устойчивости систем с переключениями описаны в следующем разделе.

4. Синтез стабилизирующего регулятора

Из-за наличия матриц A_ϕ, $\phi \in \mathcal{S}_\phi$, не являющихся сверхстабилизируемыми, решение задачи 1 с помощью (8) заведомо невозможно.

Для решения задачи 1 предлагается подход, основанный на решении задачи линейного программирования, который можно рассматривать как модификацию задачи (8), в которой для не приводимых к сверхустойчивости матриц будем использовать линейные по k ограничения, обеспечивающие устойчивость замкнутой системы с матрицами M_ϕ. Такие ограничения могут быть получены с помощью техники D-разбиения [19, 20], которая описана далее.

Для простоты индексы ϕ у матриц A и M и их элементов опущены. С учетом $b = [1\ 1]^\top$ характеристический полином матрицы замкнутой системы

$$M = A + bk^\top = \begin{bmatrix} a_{11} + k_1 & a_{12} + k_2 \\ a_{21} + k_1 & a_{22} + k_2 \end{bmatrix}$$

имеет вид

$$\begin{gathered} d(s,k) = \det(sI - M) = \\ = s^2 - s(k_1 + k_2 + a_{11} + a_{22}) + k_1(a_{22} - a_{12}) + k_2(a_{11} - a_{21}) + \det(A). \end{gathered}$$

Согласно [20] при изменении k расположение корней $d(s,k)$ может измениться только в случае, если вещественный корень (или вещественная часть пары комплексно-сопряженных корней) перейдет через ноль (через мнимую ось на комплексной плоскости). Соответствующие границы D-разбиения описываются параметрическим уравнением $d(j\omega, k) = 0$ или в явной форме:

$$\begin{cases} -\omega^2 + k_1(a_{22} - a_{12}) + k_2(a_{11} - a_{21}) + \det(A) = 0, \\ \omega(k_1 + k_2 + a_{11} + a_{22}) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

При $\omega = 0$ система (11) имеет особое решение

$$k_1(a_{22} - a_{12}) + k_2(a_{11} - a_{21}) + \det(A) = 0, \tag{12}$$

которое дает уравнение одной из границ.

Уравнение второй границы задается равенством, полученным из второго уравнения в (11):

$$k_1 + k_2 + a_{11} + a_{22} = 0, \tag{13}$$

с той разницей, что границей служит не вся прямая, а луч, исходящий из точки пересечения с прямой (12), который параметрически задается функциями:

$$\begin{gathered} k_1(\omega) = \frac{1}{r}(\omega^2 + a_{11}^2 - a_{21}[a_{11} + a_{22} - a_{12}]), \\ k_2(\omega) = -\frac{1}{r}(\omega^2 + a_{22}^2 - a_{12}[a_{11} + a_{22} - a_{21}]), \\ r = -a_{11} - a_{12} + a_{21} + a_{22}, \quad \omega \in (0, \infty). \end{gathered} \tag{14}$$

Границы D-разбиения, задаваемые (12) и (13), (14), разбивают плоскость параметров регулятора (k_1, k_2) на три области:

– вещественные части обоих корней полинома $d(s, k)$ неотрицательные ($\mathrm{Re}\{\lambda_{1,2}(M)\} \geqslant 0$);

– один корень полинома $d(s, k)$ устойчив, а второй – нет ($\mathrm{Re}\{\lambda_1(M)\} < 0$, $\mathrm{Re}\{\lambda_2(M)\} \geqslant 0$);

– оба корня полинома $d(s, k)$ устойчивы ($\mathrm{Re}\{\lambda_{1,2}(M)\} < 0$).

Последняя область, где матрица M замкнутой системы устойчива, задает множество стабилизирующих регуляторов для соответствующей матрицы A. Границы этого множества задаются линейными ограничениями, получаемыми из (12), (13).

Используя найденные ограничения, приходим к следующей задаче линейного программирования, разрешающей задачу 1:

$$\max \sigma,$$

$$-(a_{ij}^{\psi} + k_j) - \sum_{j \neq i} n_{ij}^{\psi} \geqslant \sigma, \quad i = 1, 2,$$

$$-n_{ij}^{\psi} \leqslant a_{ij}^{\psi} + k_j \leqslant n_{ij}^{\psi}, \quad i, j = 1, 2,\ i \neq j,\ \psi \in \mathcal{S}_{\psi}, \tag{15}$$

$$c_i^{\phi} k^{\top} + z_i^{\phi} < 0, \quad i = 1, 2,\ \phi \in \mathcal{S}_{\phi}.$$

В (15) ограничения на элементы матриц замкнутых подсистем M_{ψ}, $\psi \in \mathcal{S}_{\psi}$ совпадают с аналогичными в задаче (8). Векторы $c_i^{\phi} \in \mathbb{R}^2$ и скаляры $z_i^{\phi} \in \mathbb{R}$, найденные с помощью D-разбиения, задают линейные ограничения, обеспечивающие устойчивость замкнутой системы с матрицами M_{ϕ}.

Теперь можно сформулировать алгоритм решения задачи 1 для системы (9).

Алгоритм 1.

1. Найти подмножества A_{ϕ} и A_{ψ} матриц объекта $A_s \in \mathcal{A}$ с помощью (10).
2. Для матриц A_{ψ} построить D-разбиение согласно описанному подходу и найти параметры ограничений, используя (12), (13).
3. Сформировать и решить задачу линейного программирования (15).

Существование решения задачи (15) определяется теми же условиями, что и у задачи (8): если найдено решение k, $\sigma > 0$, то задача 1 решена.

Описанный алгоритм может использоваться для решения общей задачи с произвольным вектором $b = [b_1\ b_2]^{\top} \in \mathbb{R}^2$ в системе (9). Однако в этом случае нельзя использовать критерий (10) для поиска множества A_{ϕ}, $\phi \in \mathcal{S}_{\phi}$, и в первом пункте алгоритма 1 следует проверять сверхстабилизируемость матриц A_s, $s \in \mathcal{S}$, используя процедуру синтеза из [13, раздел 2]. В этом случае система (11) примет вид

$$\begin{cases} -\omega^2 + k_1(b_1 a_{22} - b_2 a_{12}) + k_2(b_2 a_{11} - b_1 a_{21}) + \det(A) = 0, \\ \omega(k_1 b_1 + k_2 b_2 + a_{11} + a_{22}) = 0. \end{cases}$$

Соответственно изменятся расчетные формулы (12), (13) и (14) для поиска границ области устойчивости.

Следует отметить, что первый пункт алгоритма 1 позволяет проверить только необходимое условие одновременной сверхстабилизируемости, а именно сверхстабилизируемость отдельных матриц, причем для фиксированного вектора b. Но даже если все матрицы A_s, $s \in \mathcal{S}$ сверхстабилизируемы по отдельности, они в совокупности могут не быть одновременно сверхстабилизируемыми. В этом случае алгоритм 1 можно немного модифицировать: формировать семейство A_ψ «вручную», используя в качестве целевого показателя условие

$$\max_{\mathcal{S}} |\mathcal{S}_\psi|,$$

т.е. искать разрешимую задачу (15), в которой максимально возможное число матриц из $\mathcal{A}$ приводится к сверхустойчивости. Такая задача является комбинаторной и для небольших размерностей $\mathcal{S}$ решается простым перебором. Для бо́льших размерностей можно искать множество $\mathcal{S}_\psi$ на основе анализа области пересечения множеств сверхстабилизирующих регуляторов матриц A_s, $s \in \mathcal{S}$, которые можно построить в явном виде, проанализировав неравенства $-m_{ii}^s > |m_{ij}^s|$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, подробнее см. пример в разделе 5.

Заметим также, что существует вырожденный случай, когда ни одну матрицу из $\mathcal{A}$ нельзя привести к сверхустойчивости с помощью статического регулятора. Тогда применение предложенного подхода сводится к анализу пересечения областей стабилизирующих регуляторов, которые находятся D-разбиением. Если пересечение областей непусто, то оно составляет множество одновременно стабилизирующих регуляторов по состоянию, а если пусто, то таких регуляторов не существует. Найденное множество можно также использовать для оптимизации на нем иных критериев оптимальности регулятора [23, 24]. При этом область одновременно стабилизирующих регуляторов имеет простой вид, так как задается системой линейных неравенств.

Выше упоминалось, что система с переключениями (9) может терять свойство экспоненциальной устойчивости при любом сигнале переключений, имеющем место для решения задачи (8) (точнее оно сохраняется только для переключений между сверхустойчивыми матрицами A_ψ, $\psi \in \mathcal{S}_\psi$) в то время как для всей системы (9) выполняется лишь необходимое условие устойчивости переключаемой системы – устойчивость каждой отдельной матрицы множества $\mathcal{M}$.

В силу последнего свойства можно использовать известные подходы к обеспечению устойчивости системы (9) за счет введения ограничений на закон переключений $\rho(t)$. Например, известен подход, в котором ограничивается максимальная частота переключений. Для этого вводится понятие *времени простоя (dwell-time)*, которое обозначается через $t_d > 0$. Оно определяется как минимальный интервал времени между двумя соседними переключениями, гарантирующий устойчивость переключаемой системы при любом порядке переключений. В [25] предложен алгоритм поиска верхней оценки t_d, в основе которого лежит следующая теорема.

Теорема 1 [25]. *Пусть $\widehat{t}_d > 0$ – заданное число. Если существуют такие $P_i \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $i \in \mathcal{S}$, что*

$$\begin{cases} P_i > 0, \quad \forall i, \\ A_i^\top P_i + P_i A_i < 0, \quad \forall i, \\ e^{A_i^\top \widehat{t}_d} P_j e^{A_i \widehat{t}_d} < P_i, \quad \forall i \neq j, \end{cases}$$

то система (9) *экспоненциально устойчива для любого закона $\rho(t)$, ограниченного временем простоя $\widehat{t}_d$.*

Оценка времени t_d ищется одномерным поиском: сначала выбирается некоторое достаточно большое число $\tau_0 > 0$, для которого условия теоремы 1 при $A_i = M_i$, $\forall i$ выполняются, тогда искомая оценка будет $\widehat{t}_d \in (0,\ \tau_0]$. Далее $\widehat{t}_d$ определяется с желаемой точностью методом половинного деления отрезка. Найденная оценка времени простоя является наилучшей в смысле квадратичных функций Ляпунова.

5. Пример

Рассмотрим систему (9) при $b = [1\ 1]^\top$ и с множеством матриц $\mathcal{A}$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{S} = \{1,\ 2,\ 3\}, \tag{16}$$

где A_s имеют следующие значения $\tau(A_s)$ из формулы (10) и собственных чисел $\lambda(A_s)$:

$$\begin{aligned} &\tau(A_1) = -1, && \tau(A_2) = -5, && \tau(A_3) = 1, \\ &\lambda(A_1) = -1{,}5 \pm j1{,}658, && \lambda(A_2) = \{3{,}372,\ -2{,}372\}, && \lambda(A_3) = 1 \pm j1{,}414. \end{aligned}$$

Матрицы A_1 и A_2 можно сверхстабилизировать, а матрицу A_3 – нет, согласно первому пункту алгоритма 1 формируются семейства матриц

$$A_\psi = \{A_1,\ A_2\} \quad \text{и} \quad A_\phi = A_3.$$

С помощью техники D-разбиения на основе (12)–(14) определяется область стабилизирующих регуляторов для матрицы A_3, ее границы определяются следующими неравенствами:

$$\begin{gathered} 2k_1 - k_2 + 3 > 0, \\ k_1 + k_2 + 2 < 0. \end{gathered}$$

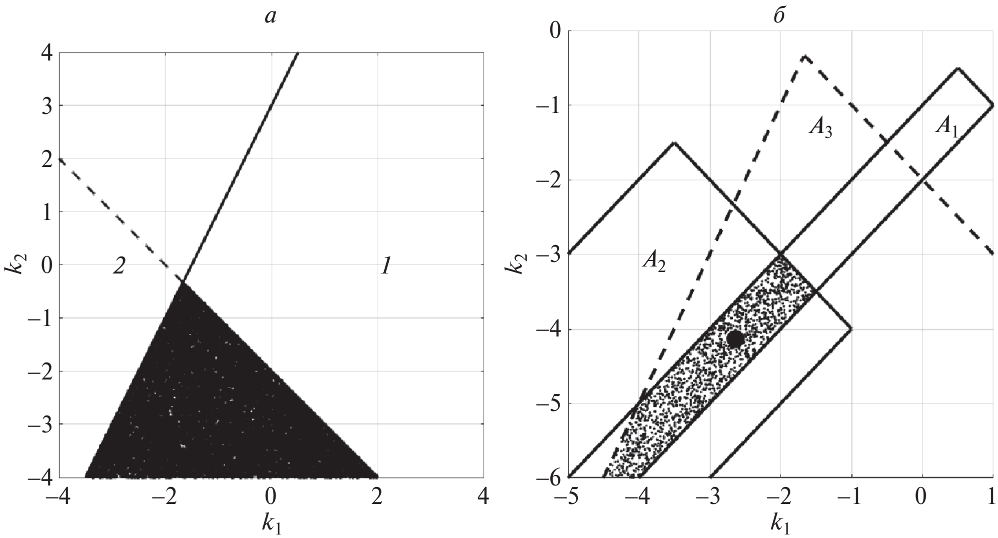

Рис. 1. *а* – Границы D-разбиения для матрицы A_3; *б* – Результаты решения задачи (15): найденный регулятор показан крупной черной точкой.

Переходя к форме ограничений, использованной в (15), получим:

$$c_1 = [-2\ 1]^\top, \quad z_1 = -3,$$
$$c_2 = [1\ 1]^\top, \quad z_2 = 2,$$

где для простоты опущен верхний индекс ϕ, так как A_ϕ состоит всего из одной матрицы.

Рисунок 1,*а* иллюстрирует применение описанной техники к матрице A_3: в пространстве коэффициентов регулятора $(k_1,\ k_2)$ сплошной линией изображена прямая, задаваемая $2k_1 - k_2 + 3 = 0$, а пунктирной показана прямая $k_1 + k_2 + 2 = 0$ (видимая ее часть не является границей, т.е. цифрой 2 обозначена вся полуплоскость «слева» от сплошной прямой!). Закрашена искомая область стабилизирующих регуляторов k, а цифрами 1 и 2 обозначены оставшиеся области в порядке, указанном после (14): в первой оба собственных значения матрицы замкнутой системы неустойчивы ($\mathrm{Re}\{\lambda_{1,2}(M_3)\} > 0$), а во второй неустойчиво только одно из них ($\mathrm{Re}\{\lambda_1(M_3)\} < 0$, $\mathrm{Re}\{\lambda_2(M_3)\} > 0$).

На последнем этапе решения задачи 1 производится формирование и численное решение задачи линейного программирования (15) с помощью подходящего программного обеспечения (в настоящей статье использовался MATLAB с пакетом cvx).

В результате синтеза найден регулятор:

$$k^\top = [-2{,}635\ \ -4{,}135], \tag{17}$$

при котором матрицы M_1 и M_2 – сверхустойчивые со степенью сверхустойчивости $\sigma = 0{,}5 > 0$, а матрица M_3 – устойчивая. Следовательно, задача 1 одновременной стабилизации решена.

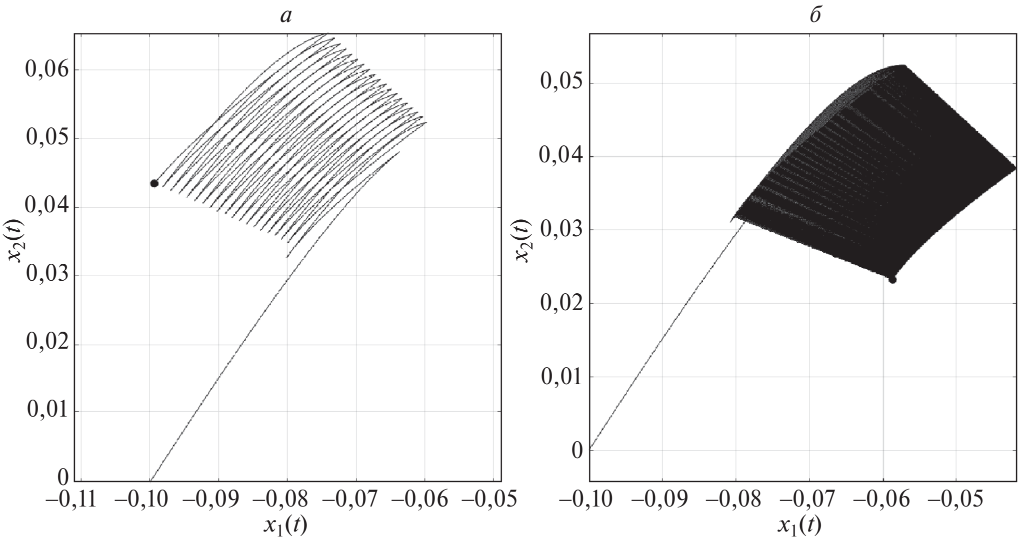

Рис. 2. Фазовые портрет системы (9), (16), (17) при $x(0) = [-0{,}1\ 0]^\top$ и временами простоя: *а* – $t_d = 0{,}2$ с и *б* – $t_d = 0{,}255$ с.

На рис. 1,*б* проиллюстрирована процедура синтеза: сплошными линиями изображены границы множеств сверхстабилизирующих регуляторов для матриц A_1 и A_2, полученные из анализа неравенств $-m_{ii}^{\psi} > |m_{ij}^{\psi}|$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, $\psi = 1, 2$, а пунктирной линией – границы множества стабилизирующих регуляторов для матрицы A_3. Крупной черной точкой показано найденное численно решение, а мелкими точками вокруг выделена область, содержащая регуляторы, которые удовлетворяют ограничениям в соответствующей задаче (15).

Система (9) с матрицами (16) и регулятором (17) не обладает свойством экспоненциальной устойчивости при произвольном законе переключений $\rho(t)$. На рис. 2,*а* показана траектория системы (9), (16), (17) при $x(0) = [-0{,}1\ 0]^\top$ и сигнале $\rho(t)$, который меняет активную матрицу через интервал времени $t_d = 0{,}2$ с, причем переключения производятся только между матрицами A_1 и A_3 (или соответственно только между M_1 и M_3 замкнутой системы). В этом случае траектория системы не ограничена ($\|x(t)\|_\infty \to \infty$ при $t \to \infty$).

С использованием описанного алгоритма [25] найдена оценка времени простоя $\widehat{t}_d = 0{,}254$ с. На рис. 2,*б* показан фазовый портрет системы при условиях, аналогичных рис. 2,*а*, но с временем простоя $t_d = 0{,}255$ с, из которого видно, что траектория системы сходится к нулю с течением времени.

Отметим, что численная проверка с помощью подхода к одновременной стабилизации, описанного в [7, 20], показала, что для матриц $\mathcal{A}$ при синтезе статического регулятора по состоянию соответствующее линейное матричное неравенство, гарантирующее существование общей квадратичной функции Ляпунова, неразрешимо.

6. Заключение

В работе предложен подход к решению задачи одновременной стабилизации линейных систем второго порядка статическим регулятором по состоянию, который является модификацией известного метода синтеза переключаемых систем на основе сверхустойчивости. Процедура синтеза регулятора, как и в исходном методе, сводится к решению специальной задачи линейного программирования. Приведен алгоритм синтеза и краткий анализ свойств найденного регулятора с точки зрения устойчивости переключаемой системы. Предложенная процедура синтеза проиллюстрирована численным примером.

Новая процедура расширяет класс решаемых задач на матрицы, не приводимые к сверхустойчивости, ценою потери заведомой экспоненциальной устойчивости переключаемой системы (она сохраняется только для подмножества сверхустойчивых подсистем). Описана частичная компенсация этого недостатка ограничением частоты переключений, осуществляемая через оценку минимального времени простоя известным методом.

Развитием данного подхода может служить попытка учета времени простоя в процедуре синтеза. В качестве предельного случая можно вообще отказаться от сверхустойчивости и формулировать задачу о поиске оптимального по времени простоя статического регулятора на множестве одновременно стабилизирующих регуляторов, найденном с помощью описанной процедуры D-разбиения.

Другой задачей дальнейших исследований является анализ классов, «аналогичных» сверхустойчивости, заведомо гарантирующих существование общей функции Ляпунова у матриц переключаемой системы, но более широких. Наиболее очевидным кандидатом в этом направлении видятся диагонально устойчивые матрицы, подмножеством которых являются сверхустойчивые.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Petersen I.R.* A Procedure for Simultaneously Stabilizing a Collection of Single Input Linear Systems Using Non-linear State Feedback Control // Automatica. 1987. V. 23. No. 1. P. 33–40.

2. *Boyd S.P., Balakrishnan V., Feron E., El Ghaoui L.* Control System Analysis and Synthesis via Linear Matrix Inequalities // Proc. ACC. 1993. P. 2147–2154.

3. *Paskota M., Sreeram V., Teo K.L., Mees A.I.* Optimal Simultaneous Stabilization of Linear Single-Input Systems via Linear State Feedback Control // Int. J. Control. 1994. V. 60. No. 4. P. 483–498.

4. *Blondel V.* Simultaneous Stabilization of Linear Systems. London: Springer, 1995.

5. *Lam J., Cao Y.-Y.* Simultaneous Linear-Quadratic Optimal Control Design via Static Output Feedback // Int. J. Robust Nonlinear Control. 1999. V. 9. P. 551–558.

6. *Saadatjoo F., Derhami V., Karbassi S.M.* Simultaneous Control of Linear Systems by State Feedback // Comput. Math. Apll. 2009. V. 58. P. 154–160.

7. *Boyd S.P., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.

8. *Lieberzon D.* Switching in Systems and Control. Boston: Birkhauser, 2003.

9. *Lin H., Antsaklis P.J.* Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results // Trans. Autom. Control. 2009. V. 52, No. 2. P. 308–302.

10. *Фурсов А.С., Хусаинов Э.Ф.* Сверхстабилизация линейных динамических объектов при действии операторных возмущений // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 7. С. 865–876.

11. *Фурсов А.С., Хусаинов Э.Ф.* К вопросу о стабилизации переключаемых линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 11. С. 1522–1533.

12. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Сверхустойчивые линейные системы управления. I. Анализ // АиТ. 2002. № 8. С. 37–53.
Polyak B.T., Shcherbakov P.S. Superstable Linear Control Systems. I. Analysis // Autom. Remote Control. 2002. V. 63. No. 8. P. 1239–1254.

13. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Сверхустойчивые линейные системы управления. II. Синтез // АиТ. 2002. № 11. С. 56–75.
Polyak B.T., Shcherbakov P.S. Superstable Linear Control Systems. II. Design // Autom. Remote Control. 2002. V. 63. No. 11. P. 1745–1763.

14. *Talagaev Y.V.* State Estimation and Stabilization of Continuous-Time Takagi-Sugeno Fuzzy Systems with Constraints of Positiveness and Superstability // Proc. of 2017 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE). 2017. P. 1–6. https://doi.org/10.1109/FUZZ-IEEE.2017.8015437

15. *Ильин А.В., Крылов П.А., Фурсов А.С.* О некотором подходе к задаче стабилизации параметрически неопределенной линейной нестационарной системы // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. 2020. Т. 494. С. 97–104.

16. *Щеглова А.А.* К вопросу о сверхустойчивости интервального семейства дифференциально-алгебраических уравнений // АиТ. 2021. № 2. С. 55–70.
Shcheglova A.A. On the Superstability of an Interval Family of Differential-Algebraic Equations // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 2. P. 232–244.

17. *Borawski K.* State-Feedback Control in Descriptor Discrete-Time Fractional-Order Linear Systems: A Superstability-Based Approach // Appl. Sci. 2021. No. 11. 10568.

18. *Ibeas A.* Superstability of Linear Switched Systems // Int. J. Syst. Sci. 2014. V. 45. I. 11. P. 2402–2410.

19. *Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А.* Современное состояние метода D-разбиения // АиТ. 2008. № 12. С. 3–40.
Gryazina E.N., Polyak B.T., Tremba A.A. D-decomposition technique state-of-the-art // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 12. P. 1991–2026.

20. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.

21. *Shorten R., Narendra K.S.* Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of a Common Quadratic Lyapunov Function for a Finite Number of Stable Second Order Linear Time-invariant Systems // Int. J. Adapt. Control Signal Proc. 2003. V. 16. No. 10. P. 709–728.

22. *Balde M., Boscain U., Mason P.* A Note on Stability Conditions for Planar Switched Systems // Int. J. Control. 2009. V. 82. No. 10. P. 1882–1888.

23. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.

24. *Кочетков С.А., Уткин В.А.* Минимизация нормы матрицы обратной связи в задачах модального управления // АиТ. 2014. № 2. С. 72–105.

Kochetkov S.A., Utkin V.A. Minimizing the feedback matrix norm in modal control problems // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 2. P. 234–262.

25. *Geromel J.C., Colaneri P.* Stability and Stabilization of Continuous-Time Switched Systems // SIAM J. Control. Optim. 2006. V. 45. I. 5. P. 1915–1930.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 25.01.2024

После доработки 12.03.2024

Принята к публикации 20.03.2024